Variation d'une suite

Soit (U_n) une suite numérique définie pour tout entier n.

Une suite $(U_n)_{(n \text{ appartenant à } N)}$ est **croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $U_n + 1 \geq U_n$.

Une suite $(U_n)_{(n \text{ appartenant à } N)}$ est **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} \leq U_n$.

Une suite $(U_n)_{(n \text{ appartenant à } N)}$ est **strictement croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} > U_n$.

Une suite $(U_n)_{(n \text{ appartenant à } N)}$ est **strictement décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} < U_n$.

Montrer qu'une suite est monotone revient à montrer que la suite est croissante ou décroissante.

Pour étudier les variations d'une suite, il existe quatre méthodes :

I. Comparer directement U_{n+1} à U_n pour tout n appartenant à N.

II. Étudier le signe de $U_{n+1} - U_n$ pour tout n appartenant à N :

Si $U_{n+1} - U_n \geq 0$, (U_n) est croissante car alors $U_{n+1} \geq U_n$ et,

si U_{n+1} - Un ≤ 0, (U_n) est décroissante car alors $U_{n+1} \leq U_n$

III. Si une suite est strictement positive, comparer $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$

Si par exemple $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$ alors $U_{n+1} \geq U_n$ donc (U_n) est croissante.

IV. Si $U_n = f(n)$, **étudier les variations** de f sur R_+ :

Si f est croissante sur R_+, alors comme $n + 1 \geq n \Leftrightarrow f(n + 1) \geq f(n)$ par croissance de $f \Leftrightarrow U_n + 1 \geq U_n$, (U_n) est donc croissante.