La démonstration

La démonstration a deux sens. Un **sens général** d'abord : **tout type de preuve**. C'est le sens retrouvé couramment : par exemple, en justice, on va chercher à démontrer la culpabilité ou l'innocence de quelqu'un. Ensuite, elle a aussi un **sens strict**, mathématique : une **opération intellectuelle** qui vise à établir la vérité d'une proposition en la déduisant de prémisses tenues pour vraies. Les prémisses sont les propositions qui permettront de démontrer. Un axiome est une proposition tenue pour vraie sans être démontrée. C'est un point de départ pour la démonstration. Exemple : « Le tout est plus grand que la partie ». Le **postulat** est une proposition que l'on tient pour vraie sans être démontrée mais en supposant que la démonstration est possible. Exemple : le postulat d'Euclide, « par un point extérieur à une droite d, il ne peut passer qu'une droite parallèle à la droite d. » On verra que ce postulat a posé un problème aux mathématiciens. Enfin, un **théorème** est une proposition démontrée. Exemple : le théorème de Pythagore, « dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés ».

I. Un idéal de la connaissance

La démonstration mathématique semble constituer un idéal pour la connaissance. Tout d'abord, cette démonstration est rigoureusement **objective**. Quand je fais une démonstration mathématique, je ne fais appel qu'à la **raison**, non pas aux sentiments de celui qui est en train de démontrer. C'est pourquoi beaucoup, et aussi parmi les philosophes, y ont vu un **modèle à appliquer à toutes les sciences**. C'est le cas de **Descartes** par exemple, et c'est probablement l'opinion commune au XVII^e^ siècle. Descartes était fasciné par le modèle des mathématiques, et il voulait l'appliquer à toutes les sciences, y compris la philosophie. Une citation du *Discours de la méthode* de Descartes exprime bien cette idée : « ces longues chaînes de raisons toutes faciles et toutes simples dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations m'avaient données occasion d'imaginer que toutes les choses qui peuvent tomber sous la connaissance des Hommes s'entresuivent de même façon. » Donc pour Descartes, l'ensemble des choses que l'on peut connaître doivent s'entresuivre comme s'entresuivent les vérités mathématiques que l'on a dans les démonstrations. On doit pouvoir déduire l'ensemble des vérités.

S'il y a bien un problème en démonstration, c'est celui du **statut des axiomes**, qui ne sont par définition **pas démontrés, ni démontrables**. Comment savoir s'il est vrai ? **Pascal,** dans son texte *De l'esprit géométrique*, compare deux méthodes. Il compare une méthode qui serait absolument parfaite à la méthode de la démonstration moins parfaite. Une **méthode parfaite** en sciences serait une méthode où je vais absolument **tout démontrer** et **tout définir.** Or, cette méthode est impossible puisqu'on ne peut jamais tout démontrer et tout définir. Il y aurait régression à l'infini. On est donc obligé de se contenter de la méthode géométrique, dans laquelle on ne va pas tout démontrer et pas tout définir. A propos de la méthode géométrique, Pascal dit que la **démonstration mathématique** est moins convaincante que la méthode parfaite, mais inatteignable, mais elle n'en est pas moins certaine. Elle est moins convaincante car je pars d'axiomes qui ne sont pas démontrés donc la démonstration n'est pas intégralement fondée rationnellement. Cependant, elle n'en est pas moins certaine, car les axiomes que je ne peux pas démontrer, je peux les connaître avec certitude, non pas par la raison, mais par ce que Pascal appelle la « lumière naturelle ». C'est-à-dire le **cœur**, ce qui renvoie à la célèbre citation de Pascal : « Le cœur a ses raisons que la raison ne connaît pas ». Pour Pascal, le cœur à ses vérités, les axiomes, que je peux connaître absolument et certainement par la lumière naturelle. La méthode géométrique est donc tout aussi certaine que la méthode absolument parfaite. On arrive donc à la **vérité absolue**, la vérité apodictique, c'est-à-dire absolument certaine.

II. Limites internes

Cependant, l'acceptation de la vérité d'un axiome repose sur son **évidence**. Seulement, l'évidence comme critère de vérité est-elle suffisante pour fonder une science comme les mathématiques ? L'évidence est d'abord un ressenti : n'est-ce donc pas **trop subjectif,** indéterminé ? Il existe en effet de fausses évidences. **Leibniz**, philosophe du XVII[e] et XVIII[e] siècles, dit : « Descartes a logé la vérité à l'hôtel de l'évidence, mais il a oublié de nous en donner l'adresse ». Il souligne ainsi le **caractère flou et indéterminé de l'évidence** pour qu'elle soit une base solide pour une science comme les mathématiques.
Ensuite, une seconde critique interne vient des géométries non euclidiennes. Le **postulat d'Euclide** (vu plus haut) est présentée comme un **axiome** mais les mathématiciens ont toujours eu l'intuition que c'était un **postulat**, c'est-à-dire que l'on doit pouvoir le démontrer. Ils ont essayé pendant des siècles, sans jamais y arriver. Au XIX[e] siècle, plusieurs mathématiciens décident de ne pas le démontrer directement, mais d'adopter le problème d'une autre façon remplaçant le postulat d'Euclide par un postulat qui va le contredire. Des mathématiciens comme **Riemann** vont remplacer le postulat d'Euclide par celui-ci : « par un point extérieur à une droite d, il ne peut passer aucune droite parallèle à la droite d. » En posant ce postulat non-euclidien, ils s'attendent à tomber sur des **contradictions** lors de leur démonstration. Ils sont surpris de découvrir au contraire que l'on peut fonder sur ce postulat une géométrie très cohérente mais qui donne des théorèmes très bizarres. Par exemple, la somme des angles d'un triangle n'est pas égale à 180 degrés, ou encore, par deux points, on peut faire passer une infinité de droites. Pour bien visualiser cela, on peut imaginer que ce sont les axiomes euclidiens mais projetés sur un espace sphérique. La géométrie non-euclidienne montre donc que les axiomes ne sont ni vrais, ni faux, ce sont des conventions et on peut en choisir d'autres. C'est donc une manière de fragiliser la démonstration mathématique.

III. Limites externes (Kant)

Dans cette partie, la question est la suivante : peut-on exporter la démonstration, comme veut le faire Descartes, en dehors des mathématiques ? Ici, on étudie la critique de Kant. Un jugement est une **proposition** qui met en rapport un sujet et un prédicat, c'est-à-dire un complément du sujet. Exemple : « Socrate est mortel », Socrate est le sujet, le prédicat est mortel. Kant fait, à partir de cela, la distinction entre **deux types de jugements**. Il y a les **jugements analytiques**, c'est-à-dire un jugement pour lequel il suffit d'analyser la définition du sujet pour trouver le prédicat : « le célibataire est non marié », être non marié appartient à la définition du célibat. Ces jugements, dit Kant, ne nous apprennent absolument rien, et sont **absolument certains**, puisque vrais par définition. Ensuite, les **jugements synthétiques** sont des jugements pour lesquels il ne suffit pas d'analyser le sujet pour trouver le prédicat. Ce sont des jugements pour lesquels le prédicat n'est pas contenu dans la définition du sujet : « la table est ronde », car le fait d'être rond n'appartient pas à la définition de la table, qui peut-être carrée ou rectangulaire. Donc, à la différence des jugements analytiques, les jugements synthétiques nous apprennent quelque chose, mais ne sont **jamais absolument certains**, sauf en mathématiques.
En effet, en mathématiques, les jugements sont **synthétiques**. Dans le théorème de Pythagore, le prédicat n'est pas contenu, selon Kant, dans le sujet. Pourtant, ils sont **absolument certains**, car la relation entre le sujet et le prédicat est fondée uniquement sur la **raison**. C'est un **raisonnement**. Le troisième terme qui met en relation le sujet et le prédicat ne s'appuie pas du tout sur l'observation. Ce sont donc des jugements **synthétiques *a priori*** selon Kant, et c'est pour cela qu'ils sont absolument certains.
Les jugements synthétiques qui ne se fondent pas uniquement sur la raison comme en mathématiques sont fondés sur l'**observation**. Ces jugements ne sont donc pas aussi certains que les jugements synthétiques *a priori* selon Kant, car si ces jugements synthétiques *a priori* renseignent sur comment les choses sont, ils ne renseignent pas sur le fait que les choses ne pourraient pas être autrement. « Le soleil se lève tous les jours » est un jugement synthétique *a posteriori* fondé sur l'expérience, mais la série d'**observations** sur laquelle ce jugement est fondée peut m'induire en erreur. Ce n'est pas forcément parce que le soleil se lève chaque matin depuis ma naissance qu'il se lèvera demain. On sait aussi qu'il existe des pays où le soleil ne se lève pas tous les jours. Dans le cas de la justice, démontrer que untel est coupable est fondé sur l'**expérience** : témoignages, preuves. Or, pour Kant, l'expérience ne montre jamais que je suis dans la **certitude absolue**. Si des aveux sont une preuve contre un individu, est-ce suffisant pour le reconnaître coupable ? Non, car cet individu peut s'accuser lui-même pour protéger quelqu'un d'autre.